# CONJUNTOS E INDUCCIÓN

## I) CONJUNTOS

**1.** Considere los siguientes conjuntos:

$A=\{x\epsilon Z/x^2<10\}$ , $B=\{x\epsilon Z/ |x-2| \leq 3\}$ , $C=\{x\epsilon N/x \text{ es divisor de } 8\}$

Halle:

a) Cada uno de los conjuntos por extensión
b) Sus intersecciones: $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\cap B\cap C$
c) Sus uniones: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$
d) Las diferencias: A-B, B-A, A-C, C-A, B-C, C-B
e) Tomando el Universal $U=\{x\epsilon Z/ |x| \leq 8 \}$, halle los complementos de A, B y C.
f) Grafique los conjuntos mediante un diagrama de Venn

**2.** Sean: $A=\{ 1 , 2 \}$ , $B=\{ \{1\} , \{2\} \}$ , $C=\{ 1 , 2 , \{ 1 \} , \{ 2 \} , \emptyset\}$

Complete V o F, justificando:

a) $A = B$
b) $A \subseteq B$
c) $A \subseteq C$
d) $B \subseteq C$
e) $\emptyset \subseteq A$
f) $\emptyset \in A$
g) $\emptyset \subseteq C$
h) $\emptyset \in C$
i) $A\cap B = \emptyset$
j) $A\cap C = A$
k) $C \subseteq A \cup B$
l) $A - B = \emptyset$
m) $C - A \subseteq B$
n) $| C - B | = 3$
o) $| A \cup B \cup C | = 4$



**3.** Represente y resuelva por conjuntos:

a) De 1800 alumnos que se presentaron a rendir las tres materias para ingresar a una universidad, 740 aprobaron matemática, 830 aprobaron física y 1220 aprobaron química. Los que aprobaron matemática y física pero no química fueron solo 32. Los que aprobaron física y química en total fueron 665, y los que aprobaron las tres fueron 128. Sabiendo que hubo 135 que no fueron capaces de aprobar siquiera una materia, calcule cuántos aprobaron únicamente matemática y no las otras dos.

b) Sobre un grupo de 45 personas, se sabe que: 16 leen novelas, 18 leen ciencia ficción, 17 leen cuentos, 3 leen los tres géneros, 1 solo lee solo cuentos y ciencia ficción, 8 leen solo cuentos y 4 leen solo novelas y ciencia ficción. Se pregunta:

b.1) ¿Cuántas personas leen solo ciencia ficción?
b.2) ¿Cuántas personas no leen ninguno de los tres géneros?
b.3) ¿Cuántas personas leen por lo menos dos géneros distintos?
b.4) ¿Cuántas personas leen novelas y cuentos pero no ciencia ficción?

c) Una encuesta sobre 200 personas acerca del consumo de tres productos: alfajores, bombones y cupcakes reveló los siguientes datos: 126 consumen cupcakes, 124 no consumen alfajores, 36 no consumen ni alfajores ni bombones, 170 cnsumen por lo menos uno de los tres productos, 60 consumen alfajores y cupcakes, 40 consumen los tres productos y 56 no consumen bombones. Se pregunta:

c.1) ¿Cuántas personas consumen solo bombones?
c.2) ¿Cuántas personas consumen alfajores y bombones?
c.3) ¿Cuántas personas consumen solo alfajores?

c.4) ¿Cuántas personas consumen alfajores y cupcakes pero no bombones?
c.5) ¿Cuántas personas no consumen ninguno de los tres productos?

**4.** Piense ejemplos de:

a) Dos conjuntos infinitos cuya intersección sea infinita
b) Dos conjuntos infinitos cuya intersección sea finita
c) Un conjunto infinito que esté incluido en otro conjunto infinito y que su diferencia sea un conjunto infinito
d) Un conjunto infinito que esté incluido en otro conjunto infinito y que su diferencia sea un conjunto finito

**5.** Sea $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

a) Halle el conjunto de Partes de A
b) De P(A) elija cinco conjuntos, todos de distintos cardinales, de forma que, tomados de a dos de ellos, siempre alguno esté incluido en el otro
c) Siendo A el conjunto referencial, halle el complemento de cada uno de los elementos de P(A)
d) Calcule, para cada $X \in P(A)$, $X \cap B$, siendo $B = \{1 , 3 \}$. Luego agrupe los conjuntos que tienen la misma intersección con B. ¿Cuántas intersecciones posibles con B hay?

**6.** Demuestre las siguientes propiedades de Conjuntos, usando las definiciones y propiedades lógicas y justificando cada una en cada paso. Luego represente por diagramas de Venn para visualizar lo demostrado:



a) $A \cap B \subseteq A$
b) $( A \cup B ) \cap C = ( A \cap C ) \cup ( B \cap C )$
c) $A \cup ( A \cap B ) = A$
d) $( X \cap Y ) \cup ( Y - X ) = Y$
e) $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$
f) $A - ( B \cap C ) = ( A - B ) \cup ( A - C )$

**7.** Demuestre los siguientes condicionales o bicondicionales, justificando todas las propiedades utilizadas:

a) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$
b) $( A - B ) \cup ( A \cap B ) = B \Rightarrow B \subseteq A$
c) $A = \overline{C} \cap ( B \cup C ) \Rightarrow A \subseteq B$
d) $X \subseteq Y \Leftrightarrow \overline{X} \cap Y = \varnothing$
e) $A \cup \overline{B} = \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

**8.** Demuestre:

a) $P ( A \cap B ) = P ( A ) \cap P ( B )$
b) $P ( A ) \cup P ( B ) \subseteq P ( A \cup B )$
c) Si $| A | = n \Rightarrow | P ( A ) | = 2^n$

**9.** Halle A X B y B X A en los siguientes casos. ¿Son iguales? ¿Son disjuntos?

a) A = { 0, 1, 2, 3 } y B = { 0 , 1 }
b) A = ∅ y B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
c) A = { $q_0$ , $q_1$ , $q_2$ } y B = { x, y, z }
d) A = N y B = { 0 }
e) A = z y B = Z

**10.** Analice el valor de verdad, demostrando o justificando según corresponda:

a) Si A ≠ ∅ ^ B ≠ ∅ => ( A X A ) – ( B X B ) = ( A – B ) X ( A – B )
b) Si A ⊆ B ^ C ⊆ D => ( A X C ) ⊆ ( B X D )
c) A X ( B U C ) = ( A X B ) U ( A X C )
d) A X B = ∅ ⇔ A = ∅ ^ B = ∅
e) Si | A | = ∞ => ∀ B : | A X B | = ∞

## II) INDUCCIÓN

**11.**

a) Considere las potencias de 2: $2^0$ , $2^1$ , $2^2$ , … y calcule las siguientes sumas parciales:

$S_1 = 2^0$ $\quad S_1 = 2^0 + 2^1$ $\quad S_2 = 2^0 + 2^1 + 2^2$ $\quad S_3 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$

b) Observe los resultados obtenidos y complete:
Al sumar las primeras n potencias de 2, obtenemos de resultado: …………
Es decir: ∀ n ∈ $N_0$ : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ = ………………….

c) Demuéstrelo por Inducción Completa

**12.** Demuestre, usando el Principio de Inducción Completa:

a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i\, 2^{i+1} = 1 + (n-1)2^n$

b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} 2.3^i + i = 3^{n+1} - 1 + \frac{n\,(n+1)}{2}$

c) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

d) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (i+1).i = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

e) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a-1}$

**13.** Demuestre las siguientes desigualdades usando el Principio de Inducción Completa:

a) ∀ n ∈ N ^ n ≥ 4 : $2^n < n!$
b) ∀ n ∈ N ^ n ≥ 3 : $2n + 1 < 2^n$
c) ∀ n ∈ N: ∀ a ∈ R: $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$
d) ∀ n ∈ N ^ n ≥ 3 : $(2n)! > 8^{n+1} n^2$

**14.** Demuestre las siguientes propiedades de la divisibilidad usando el Principio de Inducción Completa:

a) $\forall\ n \in N$: $23^n - 18^n = 5k$, con $k \in Z$
b) $\forall\ n \in N$: $6 \cdot 7^n + 10 \cdot 3^n$ es múltiplo de 4
c) $\forall\ n \in N$: $5^{2n} - 7$ es múltiplo de 6
d) $\forall\ n \in N$: $n^3 - 4n + 6$ es divisible por 3
e) $\forall\ n \in N$: $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por a+b

**15.** Siendo A, una familia de conjuntos, demuestre:

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$

b) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} (\overline{A_i} \cup B)$

| UNIDAD 2 | Conjuntos e inducción | HOJA N° 1 FECHA 2020 |
|---|---|---|

## I) CONJUNTOS

① Considere los sig. conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 < 10\}$ ; $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x-2| \leq 3\}$ ; $C = \{x \in \mathbb{N} / x$ es divisor de $8\}$

Halle:

a) Cada uno de los conjuntos por extensión

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{1, 2, 4, 8\}$

b) Sus intersecciones: $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$

$A \cap B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$A \cap C = \{1, 2\}$

$B \cap C = \{1, 2, 4\}$

$A \cap B \cap C = \{1, 2\}$

c) Sus uniones: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$

$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cup C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 8\}$

$B \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

$A \cup B \cup C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

d) Las diferencias: $A-B$, $B-A$, $A-C$, $C-A$, $B-C$, $C-B$

$A - B = \{-3, -2\}$

$B - A = \{5\}$

$A - C = \{-3, -2, -1, 0, 3\}$

$C - A = \{4, 8\}$

$B - C = \{-1, 0, 3, 5\}$

$C - B = \{8\}$

NOTA

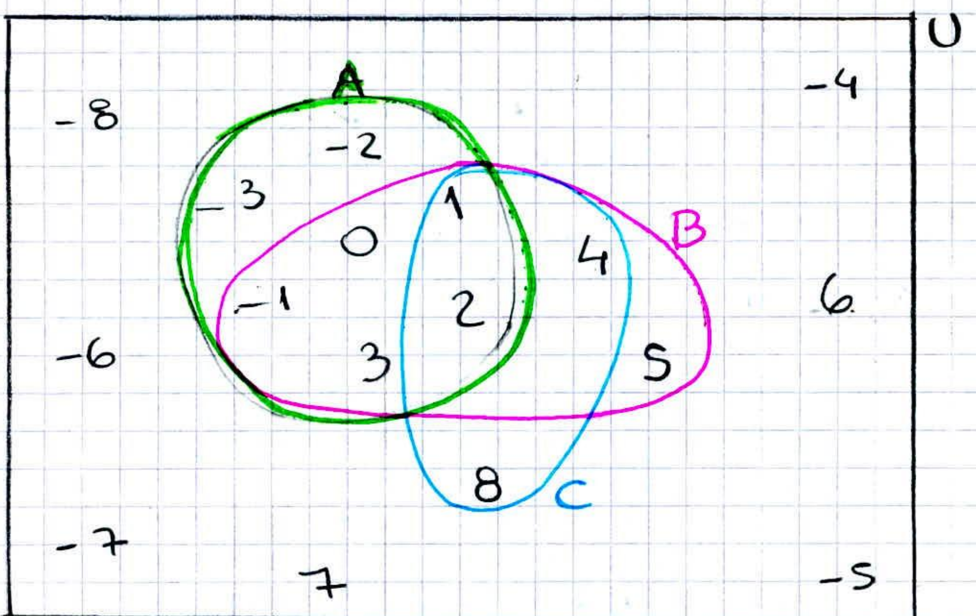
e) tomando el universal $U = \{x \in \mathbb{Z} / \underbrace{|x| \leq 8}_{-8 \leq x \leq 8}\}$ halle los complementos de A, B y C

$A^c = \{-8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B^c = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, 6, 7, 8\}$

$C^c = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 3, 5, 6, 7\}$

f) Grafique los conjuntos mediante un diagrama de Venn



02

HOJA N° 2

Matemática Discreta

FECHA 2020

② Sea $A = \{1,2\}$ $B = \{\{1\}, \{2\}\}$ y $C = \{1, 2, \{1\}, \emptyset\}$
Complete V o F, justificando:

a) $A = B$

F, $1 \in A$ y $1 \notin B$

b) $A \subseteq B$

F. $1 \in A$ pero $1 \notin B$

c) $A \subseteq C$

V. $\forall x \in A, x \in C$: $1 \in A$ y $1 \in C$
$2 \in A$ y $2 \in C$

d) $B \subseteq C$

F. $\{2\} \subset B$ pero $\{2\} \not\subset C$

e) $\emptyset \subseteq A$

V

f) $\emptyset \in A$

F

g) $\emptyset \subseteq C$ V acá es por que el conj. vacío esta incluido en todos los conjuntos

h) $\emptyset \in C$ V es porq: $C = \{1, 2, \{1\}, \emptyset\}$

i) $A \cap B = \emptyset$ V

j) $A \cap C = A$ V

$A \cap C = \{1,2\} = A$

k) $C \subseteq A \cup B$ F

$A \cup B = \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$, $\emptyset \in C$ pero $\emptyset \notin A \cup B$

l) $A - B = \emptyset$ F, $A - B = \{1,2\} \neq \emptyset$

m) $C - A \subseteq B$ F, $C - A = \{\{1\}, \emptyset\}$, $\emptyset \notin B$

n) $|C - B| = 3$ V, $C - B = \{1, 2, \emptyset\}$, $|C - B| = 3 \Rightarrow \# C - B = 3$

o) $|A \cup B \cup C| = 4$ F. $A \cup B \cup C = \{1, 2, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$, $\# A \cup B \cup C = 5 \neq 4$

NOTA

③ Represente y resuelve por conjuntos:

a) De 1800 alumnos que se presentaron a rendir las tres materias para ingresar a una universidad, 740 aprobaron matemática, 830 aprobaron física y 1220 aprobaron química. Los que aprobaron matemática y física pero no química fueron solo 32. Los que aprobaron física y química en total fueron 665 y los que aprobaron las tres materias fueron 128. Sabiendo que hubo 135 que no fueron capaces de aprobar siquiera una materia, calcule cuántos aprobaron únicamente matemática y no las otras dos

$M = \{x / x \text{ aprobó Matemática}\}$

$F = \{x / x \text{ aprobó Física}\}$

$Q = \{x / x \text{ aprobó Química}\}$

$U = \{x / x \text{ se presentó a rendir}\}$

Voy a trabajar con # de conjunto (cantidad de elementos)

$|U| = 1800$ $\qquad$ $|M \cap F \cap Q^c| = 32$

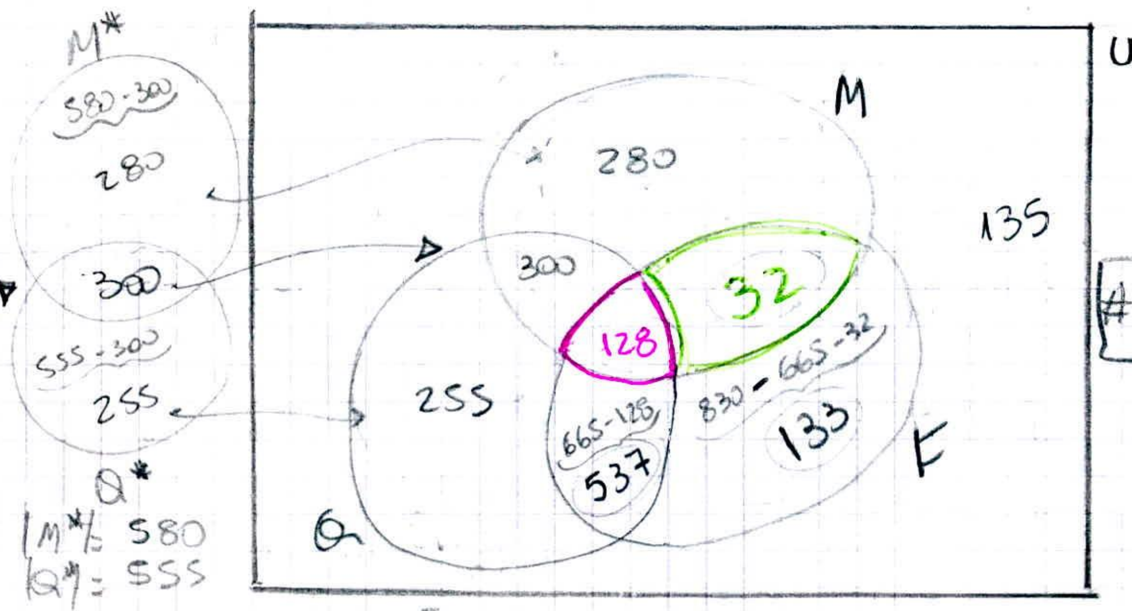
$|M| = 740$ $\qquad$ $|F \cap Q| = 665$

$|F| = 830$ $\qquad$ $|M \cap F \cap Q| = 128$

$|Q| = 1220$ $\qquad$ $|(M \cup F \cup Q)^c| = 135$

$|M \cap F^c \cap Q^c| = ?$ $\qquad$ $|U| = 1800$ $\qquad$ $1800 - 135$

$M \cup F \cup Q = 1665$




$\boxed{\# M \cap F^c \cap Q^c = 280}$ ✓

$|M^*| = 580$

$|Q^*| = 555$

$|M^* \cup Q^*| = 1665 - 830 = 835$

$|M^* \cup Q^*| = |M^*| + |Q^*| - |M^* \cap Q^*|$ $\qquad$ $|M^* \cap Q^*| = 300$

$835 = 580 + 555 - |M^* \cap Q^*|$

Mat Discreta

2020

b) Sobre un grupo de 45 personas se sabe que: 16 leen novelas, 18 leen ciencia ficción, 17 leen cuentos, 3 leen los tres géneros, 1 solo lee solo cuentos y ciencia ficción, 8 leen solo cuentos y 4 leen solo novelas y ciencia ficción. Se pregunta:

b1) ¿cuántas personas leen solo ciencia ficción?

b2) ¿cuántas personas no leen ninguno de los 3 géneros?

b3) ¿cuántas personas leen, por lo menos, dos géneros distintos?

b4) ¿cuántas personas leen novelas y cuentos pero no ciencia ficción?

$U = \{x / x \text{ es una persona de un grupo}\}$ $|U| = 45$

$N = \{x / x \text{ lee Novelas}\}$ $|N| = 16$

$F = \{x / x \text{ lee ciencia Ficción}\}$ $|F| = 18$

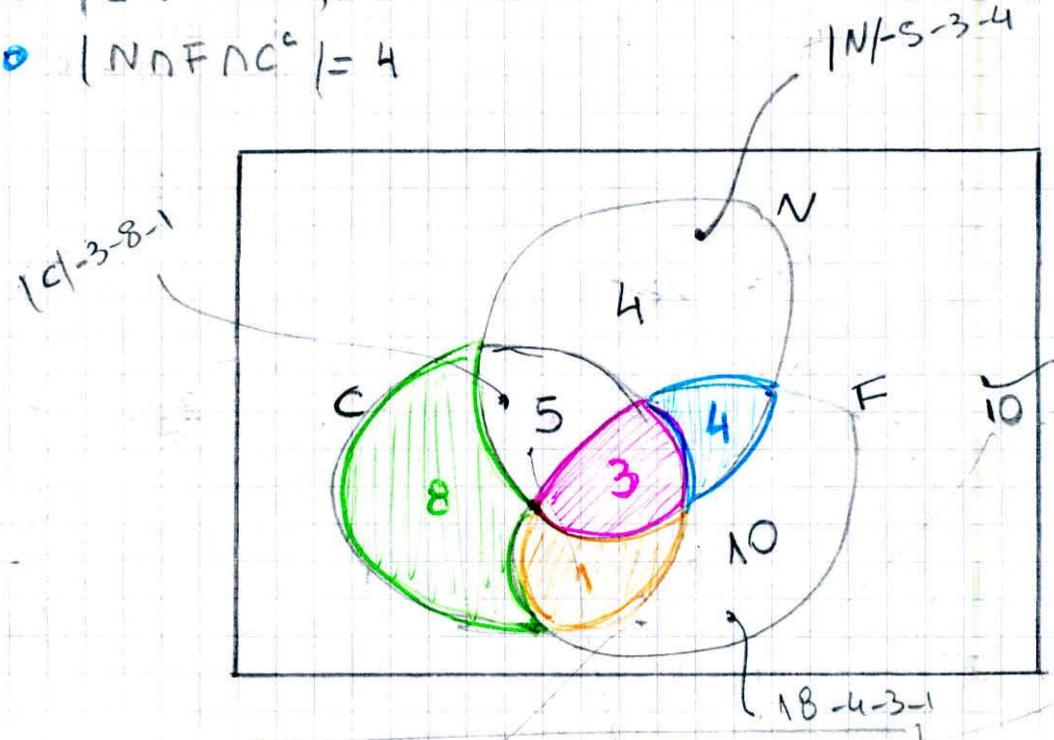
$C = \{x / x \text{ lee Cuentos}\}$ $|C| = 17$

$|N \cap F \cap C| = 3$

$|C \cap F \cap N^c| = 1$

$|C \cap F^c \cap N^c| = 8$

$|N \cap F \cap C^c| = 4$




$\underbrace{45 - \overbrace{F \cup C \cup N}^{35}}_{10}$

$b_3 = \underbrace{5+4+3+1}_{13}$

| | |
|---|---|
| $b_1$: 10 | $b_3$: 13 |
| $b_2$: 10 | $b_4$: 5 |

c) Una encuesta sobre 200 personas acerca del consumo de tres productos: alfajores, bombones y cupcakes, reveló los sig. datos: 126 consumen cupcakes, 124 no consumen alfajores, ~~36 no consumen alfajores~~, 36 no consumen ni alfajores ni bombones, 170 consumen por lo menos uno de los tres productos, 60 consumen alfajores y cupcakes, 40 consumen los tres productos y 56 no consumen bombones.
Se pregunta: ¿cuántas personas...

$C_1$: ... consumen solo bombones?
$C_2$: ... consumen alfajores y bombones?
$C_3$: ... consumen solo alfajores?
$C_4$: ... consumen alfajores y cupcakes pero no bombones?
$C_5$: ... no consumen ninguno de los tres productos?

$U = \{x / x$ es una persona encuestada$\}$ $\quad |U| = 200$

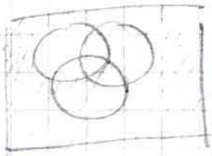
$A = \{x / x$ come alfajores$\}$ $\quad \# A^c = 124 \rightarrow \# A = 76$

$B = \{x / x$ come bombones$\}$ $\quad |B^c| = 56 \rightarrow |B| = 144$

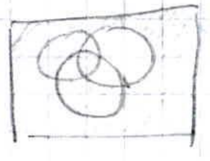
$C = \{x / x$ come cupcakes$\}$ $\quad |C| = 126$

- $|A^c \cap B^c| = 36$ $\quad |A \cap C| = 60$
- $|A \cup B \cup C| = 170$ $\quad |A \cap B \cap C| = 40$

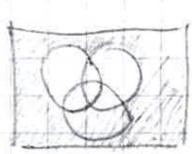
$A^c$



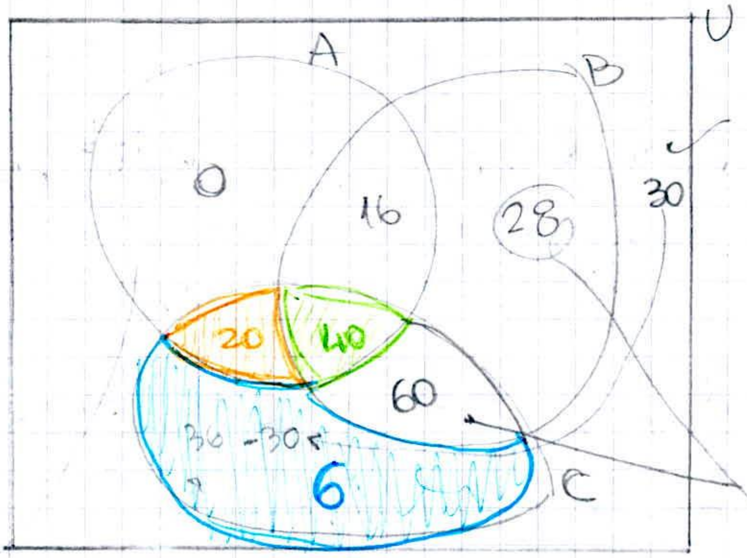
$B^c$



$A^c \cap B^c \equiv (A \cup B)^c$

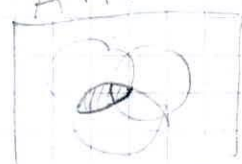


36

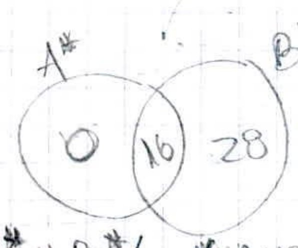



$|U| - \# A \cup B \cup C| =$
$200 - 170 = 30$

$A \cap C$



$126 - 6 - 20 - 40$




$|A^*| = |A| - |A \cap C| =$
$= 76 - 60 = 16 = |A^*|$

$|B^*| = |B| - |B \cap C| =$
$144 - 100 = 44$

$|A^* \cup B^*| = |A \cup B \cup C| - |C| =$
$= 170 - 126 = \boxed{44}$

$\# \underbrace{A^* \cup B^*}_{44} = \underbrace{|A^*|}_{16} + \underbrace{|B^*|}_{44} - |A^* \cap B^*| \rightarrow |A^* \cap B^*| = 16$

$C_1$: 28
$C_2$: 56 $(A \cap B)$
$C_3$: 0
$C_4$: 20
$C_5$: 30 $(A \cup B \cup C)^c$

U.2

Mat. Discreta UTN

4

2020

④ Piense ejemplos de:

a) Dos conjuntos infinitos cuya intersección sea infinita

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

b) Dos conjuntos infinitos cuya intersección sea finita

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 10\}$

c) Un conjunto infinito que esté incluido en otro conjunto infinito y que su diferencia sea un conj. infinito

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{R}\}$

$A \subseteq B$ ✓ $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$

d) Un conjunto infinito que esté incluido en otro conjunto infinito y que su diferencia sea un conjunto finito.

$A = \{x \in \mathbb{N}\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -3\}$

$A \subseteq B$ ✓ $B - A = \{-3, -2, -1, 0\}$, $|B - A| = 4$ ✓

---

⑤ Sea. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

a) Halle el conjunto de Partes de A

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\},$
$\{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, A\}$

b) De $\mathcal{P}(A)$ elija 5 conj. todos de ≠ cardinales de forma que, tomados de a dos de ellos, siempre alguno esté incluido en el otro.

$$\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq A$$

c) Siendo A el conj. referencial, halle el complemento de cada uno de los elementos de $\mathcal{P}(A)$.

$\overline{X} = Y \Rightarrow X = Y$

$\overline{\emptyset} = A$ ; $\overline{\{1\}} = \{2,3,4\}$ ; $\overline{\{2\}} = \{1,3,4\}$ ; $\overline{\{3\}} = \{1,2,4\}$ ;
$\overline{\{4\}} = \{1,2,3\}$ ; $\overline{\{1,2\}} = \{3,4\}$ ; $\overline{\{1,3\}} = \{2,4\}$ ; $\overline{\{1,4\}} = \{2,3\}$

escribo solo $\overline{X} = Y$

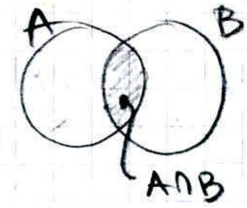
d) Calcule, para cada $X \in \mathcal{P}(A)$, $X \cap B$ siendo $B = \{1,3\}$. Luego agrupe los conjuntos que tienen la misma intersección con B ¿x inters. posibles hay?

$X \cap B = \emptyset$ con $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}$
$X \cap B = \{1\}$ con $\{1\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{1,2,4\}$
$X \cap B = \{1,3\}$ con $\{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}$
$X \cap B = \{3\}$ con $\{3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}$

⑥ Demuestre las sig. propiedades de conjuntos, usando las definiciones y propiedades lógicas y justificando cada una en cada paso. Luego represente por diagramas de Venn para visualizar lo demostrado:

a) $A \cap B \subseteq A$

Dem $\underbrace{\forall x \in A \cap B}$ $\xrightarrow{\text{def. } \cap}$ $x \in A \wedge x \in B$ $\xrightarrow{\text{simplif.}}$ $\underbrace{x \in A}$

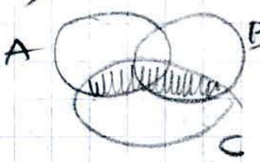



b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Dem: $\forall x \in [(A \cup B) \cap C] \overset{\text{def } \cap}{\Longleftrightarrow} x \in A \cup B \wedge x \in C \overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C$

$\overset{\text{distrib.}}{\Longleftrightarrow} (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \overset{\text{def } \cap}{\Longleftrightarrow} x \in A \cap C \vee x \in B \cap C$

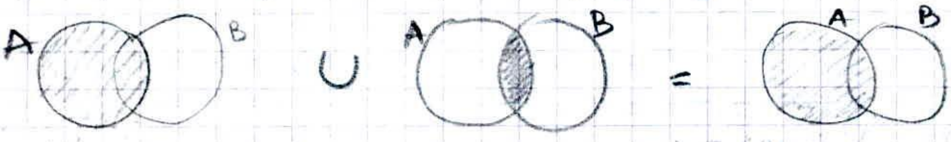
$\overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$




c) $A \cup (A \cap B) = A$

dem: $x \in [A \cup (A \cap B)] \overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} x \in A \vee x \in A \cap B \Longleftrightarrow$

$\overset{\text{def } \cap}{\Longleftrightarrow} x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \overset{\text{absorc.}}{\Longleftrightarrow} x \in A$



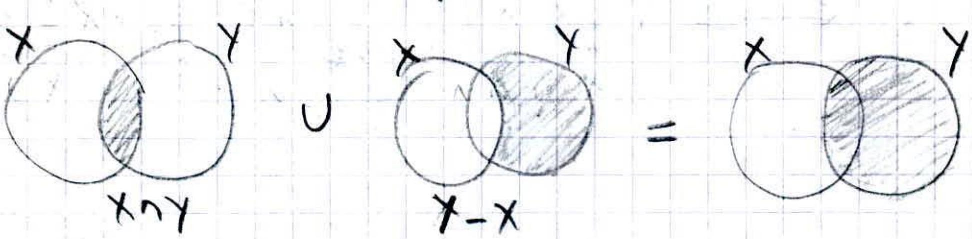

d) $(X \cap Y) \cup (Y - X) = Y$

dem: $\forall a \in [(X \cap Y) \cup (Y - X)] \overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} a \in (X \cap Y) \vee a \in (Y - X)$

$\overset{\text{def } \cap}{\Longleftrightarrow} (a \in X \wedge a \in Y) \vee (a \in (Y - X)) \overset{\text{def Diferencia}}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow (a \in X \wedge a \in Y) \vee (a \in Y \wedge a \notin X) \overset{\text{conm. y distrib.}}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow a \in Y \vee \underbrace{(a \in X \wedge a \notin X)}_{F} \overset{\text{Identidad}}{\Longleftrightarrow} \boxed{a \in Y}$



Unidad 2



Mat. Discreta UTN

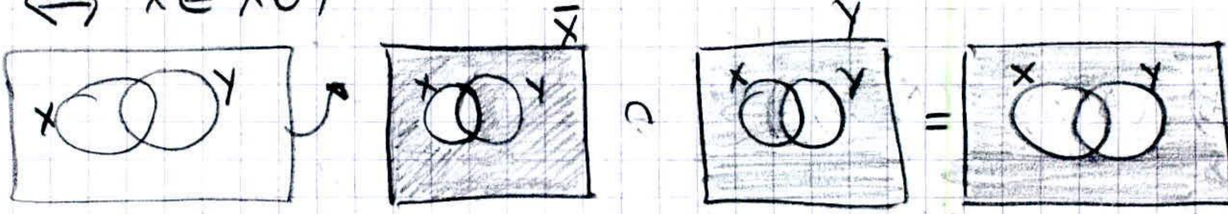
2020

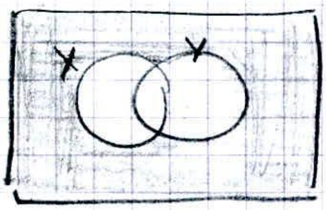
e) $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$

dem: $\forall x \in (\overline{X} \cap \overline{Y}) \overset{\text{def} \cap}{\Longleftrightarrow} x \in \overline{X} \wedge x \in \overline{Y} \Longleftrightarrow \sim(x \in X) \wedge \sim(x \in Y)$

$\overset{\text{de Morgan}}{\Longleftrightarrow} \sim[x \in X \vee x \in Y] \overset{\text{def} \cup}{\Longleftrightarrow} \sim(x \in X \cup Y) \Longleftrightarrow x \notin X \cup Y$

$\Longleftrightarrow x \in \overline{X \cup Y}$




$\overline{X \cup Y}$ =

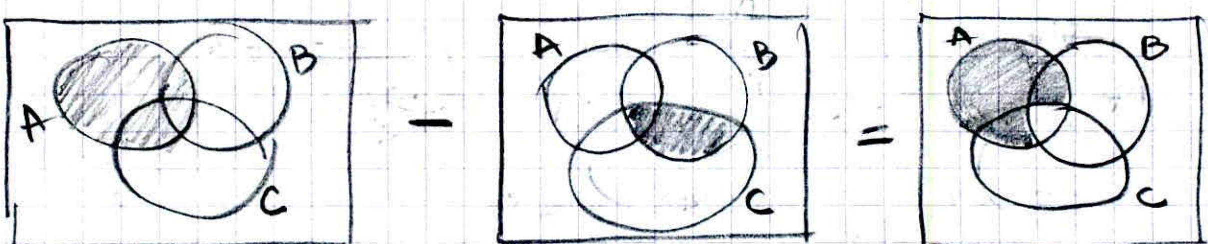
f) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$\forall x \in [A - (B \cap C)] \overset{\text{def. Diferencia}}{\Longleftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \cap C \Longleftrightarrow x \in A \wedge \sim(x \in B \cap C)$

$\overset{\text{De Morgan}}{\Longleftrightarrow} x \in A \wedge [\sim(x \in B) \vee \sim(x \in C)] \overset{\text{distributiva}}{\Longleftrightarrow}$

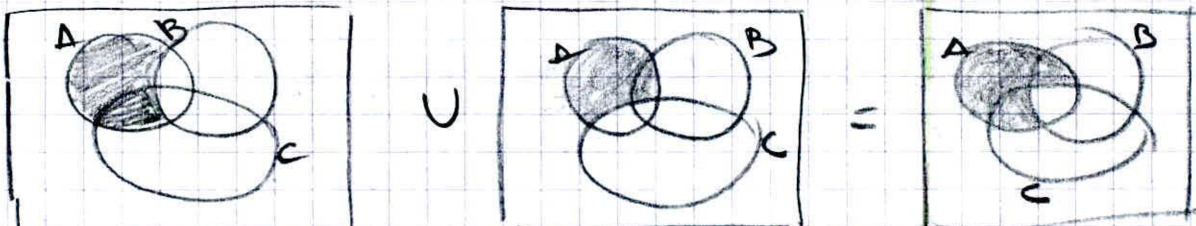
$\Longleftrightarrow [x \in A \wedge \sim(x \in B)] \vee [x \in A \wedge \sim(x \in C)] \overset{\text{def. diferencia}}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow (x \in (A - B) \vee (x \in (A - C)) \overset{\text{def.} \cup}{\Longleftrightarrow} x \in (A - B) \cup (A - C)$




A

B∩C




A−B

A−C

7) Demuestre los sig. condicionales o bicondicionales, justificando todos los propiedades utilizados:

a) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow \underbrace{A \cup B \subseteq C \cup D}$

1°) hip 1 = $A \subseteq C$ ; hip 2 = $B \subseteq D$ $\Rightarrow$ tesis ; $x \in A \subseteq C \to x \in A \Rightarrow x \in C$ ; $x \in B \subseteq D \to x \in B \Rightarrow x \in D$

dem: $\forall x \in A \cup B \xRightarrow{\text{def. } \cup} x \in A \vee x \in B \xRightarrow{\text{hip 1}} x \in C \vee x \in B \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{hip 2}} x \in C \vee x \in D \xRightarrow{\text{def } \cup} \boxed{x \in (C \cup D)}$

b) $\underbrace{(A-B) \cup (A \cap B) = B}_{\text{hip.}} \Rightarrow \underbrace{B \subseteq A}_{\text{tesis}}$

dem: $\forall x \in B \xRightarrow{\text{hip.}} x \in [(A-B) \cup (A \cap B)] \xRightarrow{\text{def } \cup} x \in (A-B) \vee x \in (A \cap B)$

$\xRightarrow{\text{def Difer.}} (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in (A \cap B) \xRightarrow{\text{def } \cap} (x \in A \wedge \sim x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\xRightarrow{\text{distrib}} x \in A \wedge (\sim x \in B \vee x \in B) \xRightarrow{\text{3° excluido}} x \in A \wedge V \Rightarrow \boxed{x \in A}$

c) $\underbrace{A = \overline{C} \cap (B \cup C)}_{\text{hip}} \Rightarrow \underbrace{A \subseteq B}_{\text{tesis}}$

Dem: $\boxed{\forall x \in A} \xRightarrow{\text{hip}} x \in (\overline{C} \cap (B \cup C)) \xRightarrow{\text{def } \cap} x \in \overline{C} \wedge x \in (B \cup C)$

$\xRightarrow{\text{def } \cup} x \in \overline{C} \wedge (x \in B \vee x \in C) \xRightarrow{\text{complem}} x \notin C \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\xRightarrow{\text{distrib}} (x \notin C \wedge x \in B) \vee \underbrace{(x \notin C \wedge x \in C}_{F} \xRightarrow{\text{simplif}} \boxed{x \in B}$

$\therefore A \subseteq B$

d) $Y \subseteq X \Leftrightarrow \overline{X} \cap Y = \emptyset$

1°) hip: $Y \subseteq X \to a \in Y \Rightarrow a \in X$ , tesis $\overline{X} \cap Y = \emptyset$

• dem: $\forall a \in \overline{X} \cap Y \xRightarrow{\text{def } \cap} a \in \overline{X} \wedge a \in Y \xRightarrow{\text{hip.}} a \in \overline{X} \wedge a \in X$

$\xRightarrow{\text{def } \cap} a \in (\overline{X} \cap X) \Rightarrow a \in \emptyset$ / $\to \boxed{\overline{X} \cap Y = \emptyset}$

2°) hip $\overline{X} \cap Y = \emptyset \Rightarrow a \in Y \Rightarrow a \notin \overline{X}$ tesis: $Y \subseteq X$

dem: $a \in Y \xRightarrow{\text{hip.}} a \notin \overline{X} \Rightarrow \sim(a \in \overline{X}) \Rightarrow \sim(\sim a \in X)$

$\xRightarrow{\text{involución}} a \in X \to \boxed{Y \subseteq X}$

e) $A \cup \overline{B} = \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow$

$A \cup \overline{B} = \overline{B}$

$(A \cup \overline{B}) \cap B = \overline{B} \cap B$

$(A \cap B) \cup \underbrace{(\overline{B} \cap B)}_{\emptyset} = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset$

$\Leftarrow$

$A \cap B = \emptyset$

$(A \cap B) \cup \overline{B} = \emptyset \cup \overline{B}$

$(A \cup \overline{B}) \cap \underbrace{(B \cup \overline{B})}_{V} = \overline{B}$

$A \cup \overline{B} = \overline{B}$

Mat Discreta UTN

⑧ Demuestre:

a) $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\forall X \in \mathcal{P}(A\cap B) \overset{\text{def. Partes}}{\Longleftrightarrow} X \subseteq A\cap B \overset{\text{def. }\cap}{\Longleftrightarrow} X \subseteq A \wedge X \subseteq B$
$\overset{\text{def. Partes}}{\Longleftrightarrow} X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \overset{\text{def. }\cap}{\Longleftrightarrow} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A\cup B)$

$\forall X: X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \overset{\text{def. }\cup}{\Longrightarrow} X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B)$
$\overset{\text{def Partes}}{\Longrightarrow} X \subseteq A \vee X \subseteq B \overset{\text{def }\cup}{\Longrightarrow} X \subseteq A\cup B \overset{\text{def Partes}}{\Longrightarrow} X \in \mathcal{P}(A\cup B)$

c) Si $|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Se puede mostrar por inducción (aún no se vio) → ver respuesta en la guía

---

PRODUCTO CARTESIANO

⑨ Halle $A\times B$ y $B\times A$ en los sig. casos ¿Son iguales? ¿Son disjuntos?

a) $A = \{0,1,2,3\}$ y $B = \{0,1\}$

$A\times B = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$
$B\times A = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\}$ $\Big\} \neq$ no son disjuntos

b) $A = \emptyset$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A\times B = \emptyset$
$B\times A = \emptyset$ $\Big\} =$ no son disjuntos

c) $A = \{q_0, q_1, q_2\}$ y $B = \{x, y, z\}$

$A\times B = \{(q_0,x),(q_0,y),(q_0,z),(q_1,x),(q_1,y),(q_1,z),(q_2,x),(q_2,y),(q_2,z)\}$
$B\times A = \{(x,q_0),(y,q_0),(z,q_0),(x,q_1),(y,q_1),(z,q_1),(x,q_2),(y,q_2),(z,q_2)\}$

• Son $\neq$. Son disjuntos

d) $A = \mathbb{N}$ y $B = \{0\}$

$A\times B = \{(n,0) \text{ con } n\in\mathbb{N}\}$
$B\times A = \{(0,n) \text{ con } n\in\mathbb{N}\}$ $\Big\} \neq$ son disjuntos

e) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{Z}$, $x\in A$, $y \in B$

$A\times B = \{(x,y), \text{ con } x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}\}$
$B\times A = \{(y,x) \text{ con } y\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{Z}\}$ $\Big\}$ son iguales

(10) Analice el valor de verdad, demostrando o justificando, según corresponda:

a) Si $\underbrace{A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset}_{V} \Rightarrow \underbrace{(A \times A) - (B \times B) = (A-B) \times (A-B)}_{F}$ **F**

contra ejemplo: $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ ; $B \times B = \{(1,1)\}$, $A - B = \{2\}$

$(A \times A) - (B \times B) = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$(A-B) \times (A-B) = \{(2,2)\}$

$\neq$

b) Si $\underbrace{A \subseteq B}_{\text{hip1}} \wedge \underbrace{C \subseteq D}_{\text{hip2}} \Rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$ **V**

$x \in A \Rightarrow x \in B$

$x \in C \Rightarrow x \in D$

dem: $\forall (x,y) \in A \times C \xRightarrow{\text{def. prod. cart.}} x \in A \wedge y \in B \xRightarrow{\text{hip 1}} x \in B \wedge y \in B$

$\xRightarrow{\text{hip2}} x \in B \wedge y \in D \xRightarrow{\text{prod. cartesiano}} \boxed{(x,y) \in (B \times D)}$

c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ **V**

$\forall (x,y) \in A \times (B \cup C) \xRightarrow{\text{prod. cart.}} x \in A \wedge y \in B \cup C \xRightarrow{\text{def. } \cup} x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$

$\xLeftrightarrow{\text{distrib}} (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \xRightarrow{\text{prod cart.}} (x,y) \in (A \times B) \vee (x,y) \in (A \times C)$

$\xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \boxed{(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)}$

d) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$ **F**

contraejemplo: $A = \emptyset$, $B = \{1,2\} \rightarrow A \times B = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$

e) Si $|A| = \infty \Rightarrow \forall B: |A \times B| = \infty$ **F**

contraejemplo: $\left.\begin{array}{l} A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \\ B = \emptyset \end{array}\right\} A \times B = \emptyset$

Unidad 2

HOJA N° 7

Mat-Discreta UTN

FECHA 2020

# II INDUCCIÓN

(11) a) considere las potencias de 2: $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ y calcule las siguientes sumas parciales: $S_1 = 2^0$, $S_2 = 2^0+2^1$; $S_3 = 2^0+2^1+2^2$, $S_4 = 2^0+2^1+2^2+2^3$

$S_1 = 1$ ; $S_2 = 3$ ; $S_3 = 7$ ; $S_4 = 15$

b) Observe los resultados obtenidos y complete:

Al sumar las primeras n potencias de 2, obtenemos de resultado: $2^{n+1}-1$

Es decir: $\forall n \in \mathbb{N}_0: 2^0+2^1+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$

c) Demuéstrelo por Inducción completa:

- Paso base: $n=0 \rightarrow 2^{0+1}-1 = 1$ ✓
- Paso inductivo: HI) $2^0+2^1+2^2+\dots+2^h = 2^{h+1}-1$

  TI) $2^0+2^1+\dots+2^h+2^{h+1} = 2^{h+2}-1$

dem: $\boxed{2^0+2^1+\dots+2^h+2^{h+1} \underset{HI}{=} (2^{h+1}-1)+2^{h+1} =}$

$\boxed{= 2\cdot 2^h - 1 + 2\cdot 2^h = 4\cdot 2^h - 1 = 2^2 2^h - 1 = 2^{h+2}-1}$ ✓

NOTA

(12) Demuestre, usando el principio de inducción completa:

a) $\forall m \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{m} i\, 2^{i-1} = 1 + (m-1)\, 2^m$

- Paso base: $m=1$ $\quad \sum_{i=1}^{1} i\, 2^{i-1} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{1} i\, 2^{i-1} = 1 \\ 1+(1-1)\, 2^{n} = 1 \end{array}\right\} = \checkmark$$

- Paso inductivo: HI: $\sum_{i=1}^{h} i\, 2^{i-1} = 1+(h-1)2^h$

TI: $\sum_{i=1}^{h+1} i\, 2^{i-1} = 1+(\overbrace{h+1-1}^{h})2^{h+1} = \boxed{1+2h2^h}$

Dem: $\sum_{i=1}^{h+1} i\, 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{h} i\, 2^{i-1} + (h+1)\, 2^{(h+1-1)} = \sum_{i=1}^{h} i 2^{i-1} + (h+1)\, 2^h =$

$\overset{HI}{=} 1+(h-1)2^h + (h+1)\, 2^h = 1 + (h-1+h+1)\, 2^h =$

$= \boxed{1+2h2^h}$ ✓ que es la tesis

b) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=0}^{m} 2.3^i + i = 3^{m+1} - 1 + \frac{m(n+1)}{2}$

- Paso base: $m=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{1} 2.3^i + i = 2+7 = 9 \\ 3^{1+1} - 1 + \frac{1(1+1)}{2} = 9-1+1 = 9 \end{array}\right\} = \checkmark$$

- Paso inductivo: HI: $\sum_{i=0}^{h} 2.3^i + i = 3^{h+1} - 1 + \frac{h(h+1)}{2}$

TI: $\sum_{i=0}^{h+1} 2.3^i + i = \boxed{3^{h+2} - 1 + \frac{((h+1)(h+2))}{2}}$

Dem: $\sum_{i=0}^{h+1} 2.3^i + i = \underbrace{\sum_{i=0}^{h} 2.3^i + i} + 2.3^{(h+1)} + (h+1) =$

$\overset{HI}{=} 3^{h+1} - 1 + \frac{h(h+1)}{2} + 2.3^{h+1} + (h+1) =$

$= 3.3^{h+1} - 1 + \frac{h(h+1)+2(h+1)}{2} =$

$= \boxed{3^{h+2} - 1 + \frac{(h+1)(h+2)}{2}}$ que es la tesis ✓

unidad 2



Mat. Discreta UTN

c) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

- Paso base : $n=1$ : $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2\cdot i-1)(2i+1)} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2\times 1+1} = \frac{1}{3}$ $\Big\} = ✓$

- Paso inductivo : HI: $\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{h}{2h+1}$

TI: $\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{h+1}{2(h+1)+1} = \frac{h+1}{2h+3}$

Dem: $\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(h+1)-1)(2(h+1)+1)} =$

$\overset{HI}{=} \frac{h}{2h+1} + \frac{1}{(2h+1)(2h+3)} = \frac{h(2h+3)+1}{(2h+1)(2h+3)} =$

$= \frac{2h^2+3h+1}{(2h+1)(2h+3)} = \frac{\cancel{(2h+1)}(h+1)}{\cancel{(2h+1)}(2h+3)} = \boxed{\frac{h+1}{2h+3}}$ ✓

d) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=0}^{n} (i+1)\cdot i = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

- Paso base : $n=1$ : $\sum_{i=0}^{1} (i+1)\cdot i = 2$

$\frac{1\,(1+1)\,(1+2)}{3} = 2$ $\Big\} = ✓$

- Paso inductivo : HI : $\sum_{i=0}^{h} (i+1)\, i = \frac{h(h+1)(h+2)}{3}$

TI: $\sum_{i=0}^{h+1} (i+1)\, i = \frac{(h+1)(h+2)(h+3)}{3}$

Dem: $\sum_{i=0}^{h+1} (i+1)\, i = \sum_{i=0}^{h} (i+1)\, i + (h+1+1)(h+1) = \sum_{i=0}^{h} (i+1)\, i + (h+1)(h+2) =$

$\overset{HI}{=} \frac{h(h+1)(h+2)}{3} + (h+1)(h+2) = \frac{h(h+1)(h+2)+3(h+1)(h+2)}{3} =$

$= \boxed{\frac{(h+1)(h+2)(h+3)}{3}}$ ✓ que es la tesis

e) $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}}= \frac{a^n - 1}{a-1}$

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = \frac{a^n - 1}{a-1}$$

- Paso base: $n = 1$: $\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{1} a^{i-1} = 1 \\ \frac{a^1 - 1}{a-1} = 1 \end{array}\right\} = \checkmark$

- Paso inductivo: HI: $\sum_{i=1}^{h} a^{i-1} = \frac{a^h - 1}{a-1}$

  TI: $\sum_{i=1}^{h+1} a^{i-1} = \frac{a^{h+1} - 1}{a-1}$

Dem: $\boxed{\sum_{i=1}^{h+1} a^{i-1}} = \sum_{i=1}^{h} a^{i-1} + a^h \overset{HI}{=} \frac{a^h - 1}{a-1} + a^h =$

$$= \frac{a^h - 1 + (a-1)a^h}{a-1} = \frac{a^h(\cancel{1} + a - \cancel{1}) - 1}{a-1} =$$

$$= \frac{a^h a - 1}{a-1} = \boxed{\frac{a^{h+1} - 1}{a-1}}$$ ✓ que es la tesis

NOTA

U.2 9

Mat. Discreta UNW 2020

(13) Demuestre las sig. desigualdades usando el Principio de Inducción Completa:

a) $\forall m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 4 : 2^m < m!$

• Paso base: $m=4$ : $2^4 = 16$ , $4! = 24$   $16 < 24$ ✓

• Paso inductivo: HI: $2^h < h!$

TI: $2^{h+1} < (h+1)! \equiv 2^{h+1} < h!(h+1)$

Dem: $2^{h+1} = 2.2^h \underset{HI}{<} 2.h! < (h+1)\,h!$ ✓

$h+1 > 2$ pues $h \geq 4$

b) $\forall m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 3 : 2m+1 < 2^m$

• Paso base: $m=3$ : $\underbrace{2 \times 3 + 1}_{7} < 2^3$

$7 < 8$ ✓

• Paso inductivo: HI: $2h+1 < 2^h$

TI: $2(h+1)+1 < 2^{h+1} \rightarrow \boxed{2h+3 < 2.2^h}$

Dem: $2h+3 = 2h+1+2 < 2^h + 2 < 2^h.2^h = 2^{h+1}$

$2 < 2^h \; \forall h > 3$

c) $\forall m \in \mathbb{N} : a \in \mathbb{R} : (1+a)^m \geq 1 + m.a$

• Paso base: $m=1$ : $(1+a)^1 = 1+a$ , $1+ma = 1+a$ $\rightarrow$ $1+a \geq 1+a$ ✓

• Paso inductivo: HI: $(1+a)^h \geq 1+ha$

TI: $(1+a)^{h+1} \geq 1+(h+1)a \rightarrow \boxed{(1+a)^{h+1} \geq 1+ah+a}$

Dem: $(1+a)^{h+1} = (1+a)(1+a)^h \underset{HI}{\geq} \underbrace{(1+a)(1+ha)}_{1+ha+a+ha^2} \geq 1+ah+a$ ✓

$\geq 0 \; \forall h \geq 1$ y $a \in \mathbb{R}$

d) $\forall m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 3 : (2m)! > 8^{m-1}\, m^2$   Paso base: $m=3 \rightarrow 6! > 8^2 9$   $720 > 576$ ✓

• Paso deductivo: (HI) $(2h)! > 8^{h-1}\, h^2$   (TI) $2(h+1)! > 8^h (h+1)^2$

Dem: $[2(h+1)]! = (2h+2)! = (2h+2)(2h+1)(2h)! = (4h^2+6h+2)(2h)!$

$\underset{HI}{>} (4h^2+6h+2)(8^{h-1}h^2) \underset{I}{>} [(h^2+2h+1)(8^h.8^{-1}.h^2) = (h+1)^2\, 8^h\, 8^{-1} h^2 =$

$= 8^h (h+1)^2\, 8^{-1} h^2 > 8^h (h+1)^2 \, 1$

$h > 3$ x enunciado $\rightarrow \frac{9}{8} > 1$

(14) Demuestre las sig. propiedades de la divisibilidad usando el Principio de Inducción Completa:

a) $\forall n \in \mathbb{N}: 23^n - 18^n = 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$

- Paso base $\longrightarrow n=1: 23-18=5 \xrightarrow{k=1}$ cumple ✓
- Paso inductivo: HI: $23^h - 18^h = 5k_1 \rightarrow 23^h = 18^h + 5k_1$

  TI: $23^{h+1} - 18^{h+1} = 5k_2$ $\qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Dem: $23^{h+1} - 18^{h+1} = 23 \cdot 23^h - 18 \cdot 18^h \overset{HI}{=} 23 \cdot (18^h + 5k_1) - 18 \cdot 18^h =$

$= 23 \times 18^h + 115k_1 - 18 \times 18^h = \underbrace{(23-18)}_{5} 18^h + (23 \times 5) k_1 =$

$= 5(\underbrace{18^h + 23k_1}_{k_2}) = \boxed{5k_2}$ ✓

b) $\forall n \in \mathbb{N}: 6 \cdot 7^n + 10 \times 3^n$ es múltiplo de 4

- Paso base: $n=1 \rightarrow 6 \times 7 + 10 \times 3 = 72 = 18 \times 4 \rightarrow$ es múltiplo de 4
- Paso inductivo: HI: $6 \cdot 7^h + 10 \times 3^h = 4k_1 \rightarrow 6 \times 7^h = 4k_1 - 10 \times 3^h$

  TI: $6 \cdot 7^{h+1} + 10 \times 3^{h+1} = 4k_2$ $\qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

dem: $6 \cdot 7^{h+1} + 10 \times 3^{h+1} = 6 \times 7^h \cdot 7 + 10 \times 3^{h+1} \overset{HI}{}$

$= (4k_1 - 10 \times 3^h) 7 + 10 \times 3^h \times 3 = 28k_1 - 40 \times 3^h =$

$= 4(\underbrace{7k_1 - 10 \times 3^h}_{k_2}) = \boxed{4k_2}$ ✓

c) $\forall n \in \mathbb{N}: 5^{2n} - 7$ es múltiplo de 6

- Paso base: $n=1 \rightarrow 5^2 - 7 = 18 = 3 \times 6 \therefore$ es múltiplo de 6 ✓
- Paso inductivo: HI: $5^{2h} - 7 = 6k_1 \rightarrow \boxed{5^{2h} = 6k_1 + 7}$

  TI: $5^{2(h+1)} - 7 = 6k_2$ $\qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Dem: $5^{2(h+1)} - 7 = 5^{2h+2} - 7 = 5^2 5^{2h} - 7 \overset{HI}{=} 25(6k_1 + 7) - 7 =$

$= 6 \times 25k_1 + \underbrace{175 - 7}_{168} = 6 \times (\underbrace{25k_1 + 28}_{k_2}) = \boxed{6k_2}$ ✓

Unidad 4

HOJA N° 10

Mat Discr. UTN

FECHA 2020

d) $\forall n \in \mathbb{N}$ : $n^3 - 4n + 6$ es divisible por 3

- Paso base : $n = 1$ : $1^3 - 4.1 + 6 = 3$ es divisible por 3 ✓
- Paso inductivo : HI : $h^3 - 4h + 6 = 3k_1$

  TI : $(h+1)^3 - 4(h+1) + 6 = 3k_2$

Dem : $(h+1)^3 - 4(h+1) + 6 = h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 4h - 4 + 6 =$

$= \boxed{h^3 - 4h + 6} + 3h^2 + 3h + 3 \overset{HI}{=} 3k_1 + 3h^2 + 3h + 3 =$

$= 3(\underbrace{k_1 + h^2 + h + 1}_{k_2}) = \boxed{3k_2}$ ✓

e) $\forall n \in \mathbb{N}$ : $n^5 - n$ es divisible por 10

- Paso base : $n = 1 \to 1^5 - 1 = 0$ , 0 es divisible por cualquier número $\therefore = 10k$, con $k = 0$
- Paso inductivo : HI : $h^5 - h = 10k_1$

  TI : $(h+1)^5 - (h+1) = 10k_2$

Dem : $(h+1)^5 - (h+1) = h^5 + 5h^4 + 10h^3 + 10h^2 + 5h + \cancel{1} - h - \cancel{1} =$

$= \boxed{h^5 - h} + 5h^4 + 10h^3 + 10h^2 + 5h \overset{HI}{=}$

$= 10k_1 + 5(\underbrace{h^4 + 2h^3 + 2h^2 + h}) = 10k_1 + 10k_3 = 10(\overbrace{k_1 + k_3}^{k_2}) =$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

$= \boxed{10k_2}$ ✓

Si h es impar $\to$ es par $\therefore h^4 + 2h^3 + 2h^2 + h = \boxed{2k_3}$

Si h es par $\to$ es par

f) $\forall n \in \mathbb{N}$ : $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por $a+b$ $k \in \mathbb{Z}$

- Paso base : $n = 1 \to a^2 - b^2 = (a+b)\overbrace{(a-b)}^{k} = (a+b)k$ ✓
- Paso inductivo : HI : $a^{2h} - b^{2h} = k_1(a+b) \to \boxed{a^{2h} = k_1(a+b) + b^{2h}}$

  TI : $\boxed{a^{2(h+1)} - b^{2(h+1)} = k_2(a+b)}$

Dem : $a^{2(h+1)} - b^{2(h+1)} = a^{2h+2} - b^{2h+2} = a^2 . a^{2h} - b^2 b^{2h} =$

$\overset{HI}{=} a^2(k_1(a+b) + b^{2h}) - b^2 b^{2h} =$

$= a^2 k_1 (a+b) + a^2 b^{2h} - b^2 b^{2h} = a^2 k_1 (a+b) + b^{2h}(a^2 - b^2) =$

$= a^2 k_1 (a+b) + b^{2h}(a+b)(a-b) = (a+b)(\underbrace{a^2 k_1 + b^{2h}(a-b)}_{k_2}) =$

$= \boxed{(a+2)\, k_2}$ ✓

Ej. 15 $\to$ ver guía